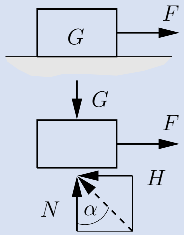
Kapitel 8

Haftung und Reibung

8

Haftung (Haftreibung)

Aufgrund der Oberflächenrauhigkeit bleibt ein Körper im Gleichgewicht, solange die Haftkraft H kleiner ist als der Grenzwert H_0. Der Wert H_0 ist proportional zur Normalkraft N:



$$|H| < H_0\,, \qquad H_0 = \mu_0 N$$

$\mu_0 =$ Haftungskoeffizient.

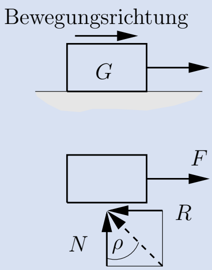
Die Haftungskraft ist eine *Reaktionskraft*; sie kann bei statisch bestimmten Systemen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.

Haftungswinkel: Für die Richtung der Resultierenden aus N und H_0 (Grenzhaftkraft) gilt

$$\tan\rho_0 = \mu_0 = \frac{H_0}{N}\,, \qquad \rho_0 = \text{Haftungswinkel}\,.$$

Reibung (Gleitreibung)

Auf den bewegten Körper wirkt infolge der Oberflächenrauhigkeit die Reibkraft R. Die Reibkraft ist eine *eingeprägte Kraft* und proportional zur Normalkraft N (Coulombsches Reibungsgesetz):



$$R = \mu\, N$$

$\mu =$ Reibungskoeffizient.

Reibungswinkel: Für die Richtung der Resultierenden aus N und R gilt:

$$\tan\rho = \mu = \frac{R}{N}\,, \qquad \rho = \text{Reibungswinkel}\,.$$

Problemtypen:

1. Haftung: $H < \mu_0 N$
2. Haftgrenzfall: $H = \mu_0 N$
3. Reibung: $R = \mu N$

Anmerkungen:

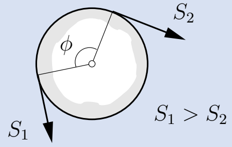
- Die Reibkraft (Haftkraft) wirkt in der Berührungsebene der Körper.
- Die Richtung der Reibkraft (Haftkraft) ist entgegengesetzt zur Richtung der Relativbewegung (die entstände, wenn diese nicht durch Haftung verhindert würde).
- Die Größe der Reibkraft (Haftkraft) ist unabhängig von der Berührungsfläche.
- Bei Haftung liegt die Resultierende aus N und H innerhalb des *Haftungskegels* mit dem Öffnungswinkel ρ_0 $(\alpha < \rho_0)$.
- Der Haftungskoeffizient ist in der Regel größer als der Reibungskoeffizient.
- Haftungs-und Reibungskoeffizienten (ungefähr) für trockene Materialien:

Material	μ_0	μ
Stahl auf Stahl	0,15 - 0,5	0,1 - 0,4
Stahl auf Teflon	0,04	0,04
Holz auf Holz	0,5	0,3
Leder auf Metall	0,4	0,3
Autoreifen auf Straße	0,7 - 0,9	0,5 - 0,8

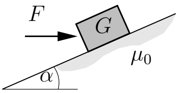
Seilhaftung und Seilreibung:

Haftung: $S_1 \leq S_2 e^{\mu_0 \phi}$

Reibung: $S_1 = S_2 e^{\mu \phi}$

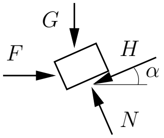


A8.1 **Aufgabe 8.1** Ein Körper vom Gewicht G befindet sich auf einer rauhen schiefen Ebene.



In welchen Grenzen muss die angreifende Kraft F liegen, damit der Körper in Ruhe bleibt?

Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$\nearrow: \quad F\cos\alpha - G\,\sin\alpha - H = 0\,,$$

$$\nwarrow: \quad -F\sin\alpha - G\,\cos\alpha + N = 0$$

folgen

$$H = F\,\cos\alpha - G\,\sin\alpha\,, \qquad N = F\,\sin\alpha + G\,\cos\alpha\,.$$

Eine *Aufwärtsbewegung* wird verhindert, wenn

$$H < \mu_0 N$$

ist. Einsetzen liefert

$$F < G\,\frac{\sin\alpha + \mu_0\,\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_0\,\sin\alpha}$$

oder mit $\mu_0 = \tan\rho_0$ und den Additionstheoremen

$$F < G\,\tan(\alpha + \rho_0)\,.$$

Bei verhinderter *Abwärtsbewegung* kehrt sich die Richtung von H um. In diesem Fall lautet die Haftbedingung

$$-H < \mu_0\,N\,.$$

Hieraus ergibt sich

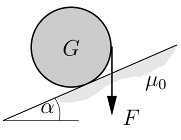
$$F > G\,\frac{\sin\alpha - \mu_0\,\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_0\,\sin\alpha} \qquad \leadsto \qquad F > G\,\tan(\alpha - \rho_0)\,.$$

Damit erhält man das Ergebnis

$$\underline{\underline{\tan(\alpha - \rho_0) < \frac{F}{G} < \tan(\alpha + \rho_0)\,.}}$$

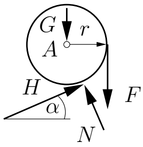
Anmerkung: Die beiden Haftbedingungen lassen sich zu $|H| < \mu_0\,N$ zusammenfassen.

Aufgabe 8.2 Die Walze vom Gewicht G soll auf der unter dem Winkel α geneigten Ebene ruhen. **A8.2**



Wie groß müssen die Kraft F und der Haftungskoeffizient μ_0 sein?

Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$\nwarrow: \quad N - (G+F)\cos\alpha = 0\,,$$

$$\nearrow: \quad H - (G+F)\sin\alpha = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad Fr - Hr = 0$$

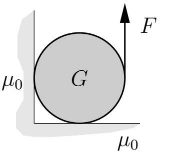
und der Haftbedingung

$$H < \mu_0 N$$

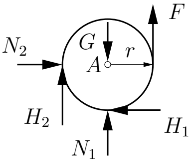
ergeben sich

$$\underline{\underline{F = G\,\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}}\,, \qquad \underline{\underline{\mu_0 > \tan\alpha}}\,.$$

Aufgabe 8.3 Wie groß muss die Kraft F sein sein, damit die Walze vom Gewicht G in Bewegung gesetzt wird? Der Haftungskoeffizient μ_0 sei an beiden Berührungspunkten gleich. **A8.3**



Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen



$$\rightarrow: \quad N_2 - H_1 = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_1 + H_2 + F - G = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad H_1 r + H_2 r - Fr = 0$$

und die Haftgrenzbedingungen

$$H_1 = \mu_0 N_1\,, \qquad H_2 = \mu_0 N_2$$

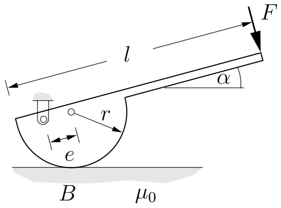
liefern

$$\underline{\underline{F = G\,\frac{\mu_0(1+\mu_0)}{1+\mu_0+2\mu_0^2}}}\,.$$

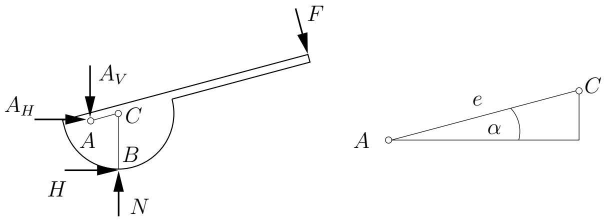
Beachte: -Das System ist statisch unbestimmt,
-Im Haftgrenzfall müssen die Kräfte H_1, H_2 entgegen der einsetzenden Bewegung eingezeichnet werden.

A8.4 **Aufgabe 8.4** Ein Spannexzenter mit den Abmessungen l und r wird in der Lage mit der Neigung α durch die Kraft F belastet.

Wie groß muss bei gegebener Haftungszahl μ_0 die Exzentrizität e sein, damit im Berührungspunkt B die Anpreßkraft N erreicht wird?



Lösung Wir skizzieren das Freikörperbild:



Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: \quad A_H + H + F\sin\alpha = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad -A_V + N - F\cos\alpha = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{C}: \quad F(l-e) - A_H e\sin\alpha - A_V e\cos\alpha - Hr = 0$$

ergibt sich durch Elimination von A_H und A_V

$$H = \frac{F\,l - N\,e\,\cos\alpha}{r - e\,\sin\alpha}\,.$$

Durch Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H| < \mu_0 N$$

folgt

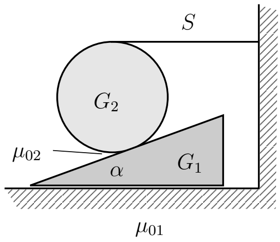
$$F\,l - N\,e\,\cos\alpha < \mu_0 N(r - e\,\sin\alpha)\,.$$

Auflösen nach e liefert

$$\underline{\underline{e > \frac{l\,\dfrac{F}{N} - \mu_0\,r}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}}}\,.$$

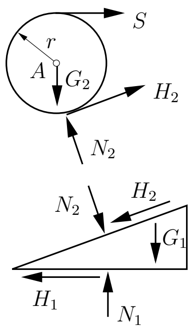
Aufgabe 8.5 Ein Keil vom Gewicht und dem Öffnungswinkel α ruht auf einer horizontalen Ebene. Auf dem Keil befindet sich eine kreiszylindrische Walze vom Gewicht G_2, die durch das Seil S gehalten wird.

A8.5



Wie groß müssen die Haftungskoeffizienten μ_{01} (zwischen Keil und Ebene) und μ_{02} (zwischen Walze und Keil) sein, damit an keiner Stelle Rutschen eintritt?

Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Walze



$$\rightarrow: \quad S + H_2 \cos\alpha - N_2 \sin\alpha = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad -G_2 + H_2 \sin\alpha + N_2 \cos\alpha = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad S\,r - H_2\,r = 0$$

und den Keil

$$\uparrow: \quad -G_1 + N_1 - H_2 \sin\alpha - N_2 \cos\alpha = 0\,,$$

$$\rightarrow: \quad -H_1 - H_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0$$

folgen die Kräfte an den Berührstellen

$$N_2 = G_2\,, \qquad H_2 = G_2\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,,$$

$$N_1 = G_1 + G_2\,, \qquad H_1 = G_2\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,.$$

Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_{01} N_1\,, \qquad H_2 < \mu_{02} N_2$$

liefert die erforderlichen Haftungskoeffizienten:

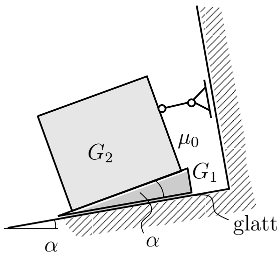
$$\underline{\underline{\mu_{01} > \frac{G_2 \sin\alpha}{(G_1+G_2)(1+\cos\alpha)}}}\,, \qquad \underline{\underline{\mu_{02} > \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}}\,.$$

A8.6

Aufgabe 8.6 Eine Kiste vom Gewicht G_2 wird auf einer *glatten* schiefen Ebene durch ein Seil gehalten. Zwischen Kiste und Ebene ist ein *rauher* Keil geschoben (Haftungskoeffizient μ_0).

a) Wie groß sind die Seilkraft S und die Kraft N_1 auf die schiefe Ebene?

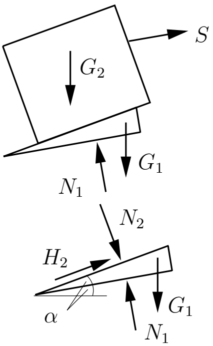
b) Wie groß muss der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit das System in Ruhe bleibt?



Lösung **a)** Die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem liefern

$$\nearrow: \quad \underline{\underline{S = (G_1 + G_2)\sin\alpha}}\,,$$

$$\nwarrow: \quad \underline{\underline{N_1 = (G_1 + G_2)\cos\alpha}}\,.$$



b) Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Keil

$$\nearrow: \quad H_2 - G_1\sin 2\alpha + N_1\sin\alpha = 0\,,$$

$$\nwarrow: \quad -N_2 - G_1\cos 2\alpha + N_1\cos\alpha = 0$$

folgt durch Einsetzen von N_1:

$$H_2 = G_1\sin 2\alpha - (G_1 + G_2)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(G_1 - G_2)\sin 2\alpha\,,$$

$$N_2 = (G_1 + G_2)\cos^2\alpha - G_1\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) - \frac{1}{2}(G_1 - G_2)\cos 2\alpha.$$

Aus der Haftbedingung

$$|H_2| < \mu_0 N_2$$

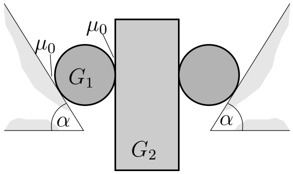
ergibt sich damit der erforderliche Haftungskoeffizient

$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{|G_1 - G_2|\sin 2\alpha}{G_1 + G_2 - (G_1 - G_2)\cos 2\alpha}}}\,.$$

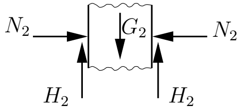
Anmerkung: Je nach Werten von G_1, G_2 und α rutscht bei Verletzung dieser Bedingung der Keil nach unten oder nach oben.

Aufgabe 8.7 Eine Klemmvorrichtung besteht aus zwei festen, unter dem Winkel α geneigten Klemmbacken, zwei losen Klemmrollen vom Gewicht G_1 und dem Klemmgut. Alle Oberflächen seien rauh und haben den Haftungskoeffizient μ_0. **A8.7**

Wie groß darf das Gewicht G_2 des Klemmgutes sein, damit kein Rutschen eintritt?



Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen für das Klemmgut



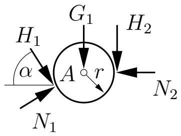
$$\uparrow: \quad 2H_2 - G_2 = 0$$

und für eine Klemmrolle

$$\uparrow: \quad N_1 \cos\alpha - H_2 - H_1 \sin\alpha - G_1 = 0\,,$$

$$\rightarrow: \quad N_1 \sin\alpha + H_1 \cos\alpha - N_2 = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad H_2 r - H_1 r = 0$$



liefern

$$H_1 = H_2 = \frac{G_2}{2}\,,$$

$$N_1 = \frac{G_2(1+\sin\alpha) + 2G_1}{2\cos\alpha}\,,$$

$$N_2 = \frac{G_2(1+\sin\alpha) + 2G_1 \sin\alpha}{2\cos\alpha}\,.$$

Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_0 N_1\,, \qquad H_2 < \mu_0 N_2$$

ergibt

$$G_2 < \frac{2\mu_0}{\cos\alpha - \mu_0(1+\sin\alpha)}\, G_1\,, \qquad G_2 < \frac{2\mu_0 \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_0(1+\sin\alpha)}\, G_1\,.$$

Wegen $\sin\alpha \leq 1$ folgt daraus

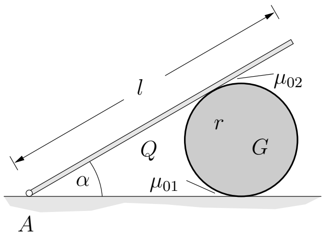
$$\underline{\underline{G_2 < \frac{2\mu_0 \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_0(1+\sin\alpha)}\, G_1\,.}}$$

Anmerkung: Für $\mu_0 = \cos\alpha/(1+\sin\alpha)$ geht die rechte Seite gegen Unendlich. Überschreitet μ_0 diesen Wert, so liegt *Selbsthemmung* vor.

A8.8

Aufgabe 8.8 Eine in A gelagerte Stange (Länge l, Gewicht Q) lehnt unter dem Winkel α gegen eine Walze (Gewicht G, Radius r).

Wie groß müssen die Haftungskoeffizienten μ_{01} und μ_{02} sein, damit das System im Gleichgewicht ist?

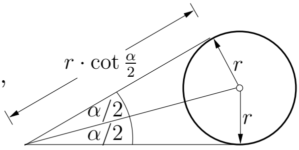


Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen für die Walze

$$\rightarrow: \quad -H_1 + N_2 \sin\alpha - H_2 \cos\alpha = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_1 - G - N_2 \cos\alpha - H_2 \sin\alpha = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{B}: \quad H_1 r - H_2 r = 0$$



und für den Stab

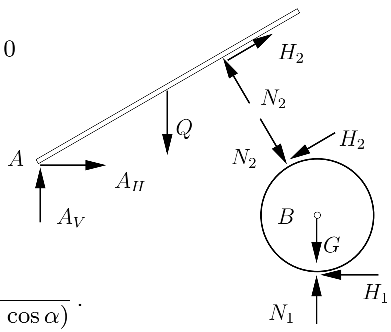
$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad Q\,\frac{l}{2}\cos\alpha - N_2\, r \cot\frac{\alpha}{2} = 0$$

liefern

$$N_1 = G + Q\,\frac{l}{2r}\,\frac{\cos\alpha}{\cot(\alpha/2)}\,,$$

$$N_2 = Q\,\frac{l}{2r}\,\frac{\cos\alpha}{\cot(\alpha/2)}\,,$$

$$H_1 = H_2 = Q\,\frac{l}{2r}\,\frac{\sin\alpha}{\cot(\alpha/2)\,(1+\cos\alpha)}\,.$$



Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_{01} N_1\,, \qquad H_2 < \mu_{02} N_2$$

ergibt mit

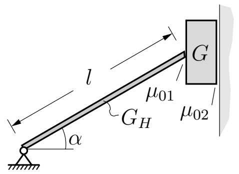
$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

die Ergebnisse

$$\underline{\underline{\mu_{01} > \frac{1}{\dfrac{G}{Q}\,\dfrac{2r}{l}\cot^2(\alpha/2) + \cos\alpha\cot(\alpha/2)}}}\,, \qquad \underline{\underline{\mu_{02} > \frac{1}{\cot(\alpha/2)\cos\alpha}}}\,.$$

Aufgabe 8.9 Durch einen Hebel vom Gewicht G_H wird ein rauher Klotz an einer Wand eingeklemmt. Die Haftungskoeffizienten an den Berührungsstellen seien μ_{01} bzw. μ_{02}. **A8.9**

Wie groß darf das Gewicht G des Klotzes sein, damit er nicht rutscht?

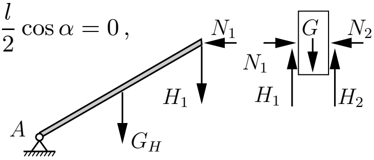


Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Hebel und für den Klotz

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad N_1 l \sin\alpha - H_1 l \cos\alpha - G_H \frac{l}{2}\cos\alpha = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad H_1 + H_2 - G = 0\,,$$

$$\rightarrow: \quad N_1 - N_2 = 0$$



und den Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_{01} N_1\,, \qquad H_2 < \mu_{02} N_2$$

ergeben sich durch Eliminieren von H_1, H_2 und N_2 und der Annahme $\mu_{01} < \tan\alpha$ die beiden Ungleichungen

$$N_1 < \frac{G_H}{2(\tan\alpha - \mu_{01})}\,, \qquad \frac{2G + G_H}{2(\tan\alpha + \mu_{02})} < N_1\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{2G + G_H}{2(\tan\alpha + \mu_{02})} < \frac{G_H}{2(\tan\alpha - \mu_{01})}$$

bzw.

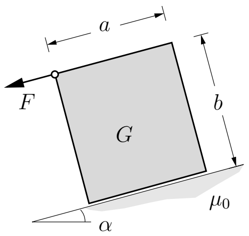
$$\underline{\underline{G < \frac{G_H}{2}\,\frac{\mu_{01} + \mu_{02}}{\tan\alpha - \mu_{01}}}}\,.$$

Anmerkungen:

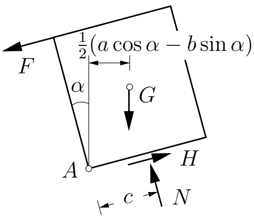
- Für $\mu_{01} = \tan\alpha$ verschwindet der Nenner. Dann kann G beliebig groß werden. Allgemein liegt für $\mu_{01} \geq \tan\alpha$ unabhängig von G_H *Selbsthemmung* vor.
- Das System ist statisch unbestimmt. Daher können die Kräfte H_i, N_i nicht bestimmt werden.
- Setzt man den Haftgrenzfall mit $H_1 = \mu_{01} N_1$ und $H_2 = \mu_{02} N_2$ voraus, so ist im Endergebnis das „<“-Zeichen durch das „=“-Zeichen zu ersetzen.

A8.10 **Aufgabe 8.10** Ein homogener Quader vom Gewicht G ruht auf einer rauhen schiefen Ebene.

Wie groß müssen die Kraft F und der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit die Bewegung in Form von Rutschen bzw. in Form von Kippen einsetzt?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$\nearrow: \quad H - F - G\sin\alpha = 0\,,$$

$$\nwarrow: \quad N - G\cos\alpha = 0\;,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad \frac{G}{2}\,(a\cos\alpha - b\sin\alpha) - Fb - Nc = 0$$

ergibt sich für die Kräfte in der Kontaktfläche und für die Lage von N

$$H = F + G\sin\alpha\,, \quad N = G\cos\alpha\,, \quad c = \frac{1}{2}(a - b\tan\alpha) - \frac{Fb}{G\cos\alpha}\,.$$

Damit *Rutschen* einsetzt, muss gelten

$$H = H_0 = \mu_0 N\,, \qquad c > 0\,.$$

Daraus folgen

$$\underline{\underline{F = G(\mu_0\cos\alpha - \sin\alpha)}}\,, \qquad \underline{\underline{\mu_0 < \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \tan\alpha)}}\,.$$

Damit *Kippen* um den Punkt A einsetzt, muss gelten

$$c = 0\,, \qquad H < \mu_0 N\,.$$

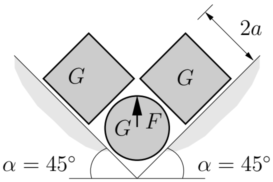
Dies liefert

$$\underline{\underline{F = G\,\frac{a\cos\alpha - b\sin\alpha}{2b}}}\,, \qquad \underline{\underline{\mu_0 > \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \tan\alpha)}}\,.$$

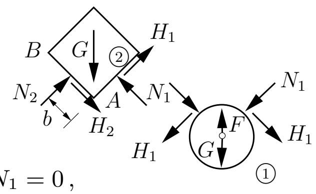
D.h. Kippen erfolgt nur bei hinreichend rauher Unterlage.

Aufgabe 8.11 Zwischen zwei schiefen Ebenen ruhen zwei Würfel und eine Walze jeweils vom Gewicht G. An allen Berührungsflächen herrsche der Haftungskoeffizient μ_0. **A8.11**

Wie groß ist die erforderliche Kraft F, um die Walze nach oben herauszuziehen? Welcher Bedingung muss μ_0 genügen, damit die Würfel dabei nicht kippen?



Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen lauten mit $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$ unter Beachtung der Symmetrie



$$① \uparrow: \quad F - G - 2\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}H_1 = 0\,,$$

$$② \rightarrow: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}H_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}H_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}H_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}H_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 - G = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad N_2 b - N_1 a = 0\,.$$

Um die Haftung zu überwinden, muss gelten

$$H_1 = \mu_0 N_1\,, \qquad H_2 = \mu_0 N_2\,.$$

Damit ergibt sich aus den ersten drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\underline{\underline{F = 2G\,\frac{1+\mu_0+\mu_0^2}{1+\mu_0^2}}}\,.$$

Die vierte Gleichgewichtsbedingung liefert

$$b = a\,\frac{1+\mu_0}{1-\mu_0}\,.$$

Damit kein Kippen um den Punkt B eintritt, muss

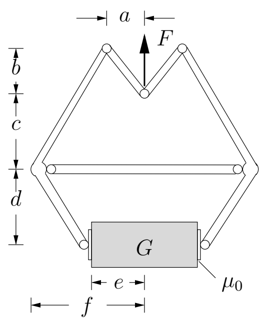
$$b < 2a$$

sein. Daraus folgt

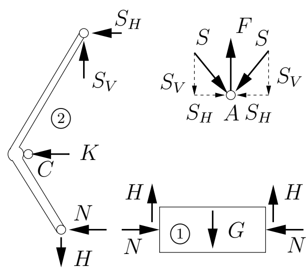
$$\frac{1+\mu_0}{1-\mu_0} < 2 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\mu_0 < \frac{1}{3}}}\,.$$

Beachte: Beim Anheben verschwinden die Kontaktkräfte zwischen der Walze und den schiefen Ebenen. Die Haftkräfte müssen richtig (der einsetzenden Bewegung entgegengerichtet) eingezeichnet werden.

A8.12 **Aufgabe 8.12** Wie groß muss bei der Steinzange der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit die Last G gehalten werden kann?



Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem



$$\uparrow: \quad F - G = 0\,,$$

am Punkt A

$$\uparrow: \quad F - 2S_V = 0\,,$$

den Körper 1

$$\uparrow: \quad 2H - G = 0$$

und den Körper 2

$$\overset{\curvearrowright}{C}: \quad Nd + H(f-e) - S_V(f-a) - S_H(b+c) = 0$$

ergeben mit

$$\frac{S_H}{S_V} = \frac{a}{b}$$

für die Kräfte H und N:

$$H = \frac{G}{2}\,, \qquad N = \frac{G}{2}\,\frac{ac+be}{bd}\,.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

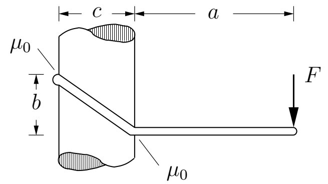
$$H < \mu_0 N$$

liefert

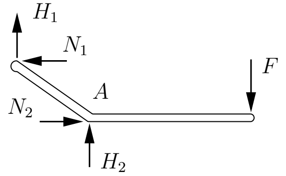
$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{bd}{ac+be}}}\,.$$

Aufgabe 8.13 Ein Steigeisen ist an einem Mast eingeklemmt und wird durch die Kraft F belastet. **A8.13**

Wie groß muss μ_0 sein, damit das Steigeisen nicht rutscht?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$\rightarrow: \quad N_2 - N_1 = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad H_1 + H_2 - F = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad Fa + H_1 c - N_1 b = 0$$

folgen

$$N_2 = N_1\,, \qquad H_1 = N_1 \frac{b}{c} - F\frac{a}{c}\,, \qquad H_2 = F(1 + \frac{a}{c}) - N_1 \frac{b}{c}\,.$$

Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_0 N_1\,, \qquad H_2 < \mu_0 N_2$$

liefert

$$N_1 \frac{b - c\mu_0}{a} < F \quad \text{und} \quad F < N_1 \frac{b + c\mu_0}{c + a}$$

bzw.

$$\frac{b - c\mu_0}{a} < \frac{b + c\mu_0}{c + a}\,.$$

Auflösen ergibt für den erforderlichen Haftkoeffizienten

$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{b}{c + 2a}}}\,.$$

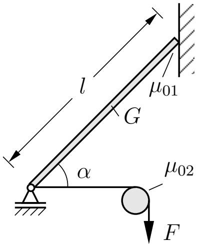
Anmerkungen:

- Die Kräfte N_1, N_2, H_1, H_2 können nicht bestimmt werden, da das System statisch unbestimmt ist!
- Die Aufgabe kann auch gelöst werden, indem man den Haftgrenzfall betrachtet. Die Ungleichungen werden dann zu Gleichungen, und die Lösung μ_0^* ist die untere Grenze für den Haftkoeffizient.

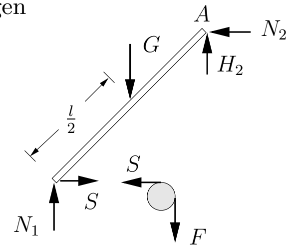
A8.14

Aufgabe 8.14 Ein Stab der Länge l und vom Gewicht G lehnt unter dem Winkel α gegen eine rauhe Wand. Am unteren Ende wird er durch ein Seil, das über einen rauhen Zapfen läuft, gehalten.

In welchen Grenzen muss die Kraft F liegen, damit das System im Gleichgewicht ist?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$\rightarrow: \quad S - N_2 = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_1 + H_2 - G = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad N_1 l \cos\alpha - S l \sin\alpha - G\,\frac{l}{2}\,\cos\alpha = 0$$

ergeben sich

$$H_2 = \frac{G}{2} - S\tan\alpha\,, \qquad N_2 = S\,.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H_2| < \mu_{01} N_2$$

liefert je nach Richtung von H_2

$$\frac{G}{2} - S\,\tan\alpha < \mu_{01} S \qquad \text{bzw.} \qquad -\frac{G}{2} + S\,\tan\alpha < \mu_{01} S\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{G}{2\,(\tan\alpha + \mu_{01})} \; < \; S \; < \; \frac{G}{2\,(\tan\alpha - \mu_{01})}\,.$$

Seilhaftung am Zapfen liegt vor, wenn gilt

$$S\,e^{-\mu_{02}\pi/2} \; < \; F \; < \; S\,e^{+\mu_{02}\pi/2}\,.$$

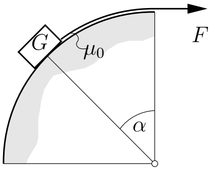
Durch Einsetzen der unteren (oberen) Schranke von S in die linke (rechte) Seite folgt

$$\underline{\underline{\frac{e^{-\mu_{02}\pi/2}}{2\,(\tan\alpha + \mu_{01})} \; < \; \frac{F}{G} \; < \; \frac{e^{+\mu_{02}\pi/2}}{2\,(\tan\alpha - \mu_{01})}}}\,.$$

Aufgabe 8.15 Der Körper vom Gewicht G wird durch ein Seil gehalten. Zwischen dem Körper bzw. dem Seil und der Fläche herrsche der Haftungskoeffizient μ_0.

A8.15

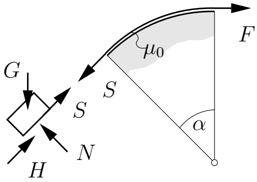
In welchen Grenzen muss F liegen, damit der Körper in Ruhe bleibt?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nwarrow: \quad N - G\cos\alpha = 0\,,$$

$$\nearrow: \quad H + S - G\sin\alpha = 0$$



ergeben sich

$$N = G\cos\alpha\,, \qquad H = G\sin\alpha - S\,.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H| < \mu_0 N$$

liefert

$$G(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha) \ < \ S \ < \ G(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)\,.$$

Mit der Haftbedingung für das Seil

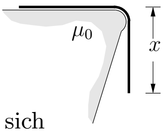
$$Se^{-\mu_0\alpha} \ < \ F \ < \ Se^{\mu_0\alpha}$$

folgt

$$\underline{\underline{e^{-\mu_0\alpha}(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha) \ < \ \frac{F}{G} \ < \ e^{\mu_0\alpha}(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)}}\,.$$

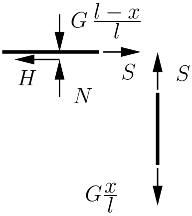
Aufgabe 8.16 Welche Strecke x darf das schwere Seil der Länge l herunterhängen, ohne dass es rutscht?

A8.16



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich

$$N = G\,\frac{l-x}{l}\,, \qquad H = S = G\,\frac{x}{l}\,.$$

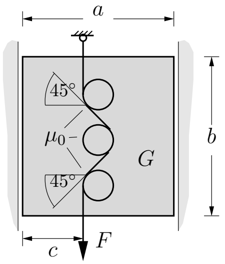


Einsetzen in die Haftbedingung $H < \mu_0 N$ liefert

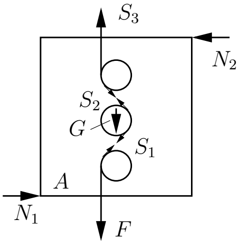
$$\underline{\underline{\frac{x}{l} < \frac{\mu_0}{1+\mu_0}}}\,.$$

A8.17 **Aufgabe 8.17** Ein zwischen glatten Wänden befindlicher Block vom Gewicht G wird durch ein Seil gehalten, das über drei rauhe Bolzen geführt ist.

Wie groß muss die Kraft F sein, damit der Block nicht rutscht? Wie groß sind die Kräfte, die von den Wänden auf den Block ausgeübt werden?



Lösung Gleichgewicht am Gesamtsystem



$$\uparrow: \quad S_3 - G - F = 0\,,$$

$$\rightarrow: \quad N_1 - N_2 = 0\,.$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad G\tfrac{1}{2}a + Fc - S_3 c - N_2 b = 0$$

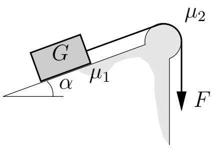
und die Haftbedingungen

$$S_1 < F e^{\mu_0 \pi/4}, \quad S_2 < S_1 e^{\mu_0 \pi/2}, \quad S_3 < S_2 e^{\mu_0 \pi/4}$$

liefern

$$\underline{\underline{F > \frac{G}{e^{\mu_0 \pi} - 1}}}\,, \qquad \underline{\underline{N_1 = N_2 = G\frac{a - 2c}{2b}}}\,.$$

A8.18 **Aufgabe 8.18** Wie groß muss die Kraft F sein, damit der Körper vom Gewicht G mit gleichförmiger Geschwindigkeit emporgezogen werden kann? Die Ebene und der Umlenkzapfen seien rauh.



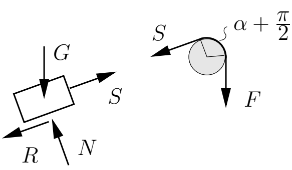
Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nwarrow: \quad N - G\cos\alpha = 0\,,$$

$$\nearrow: \quad S - R - G\sin\alpha = 0$$

und den Reibgesetzen

$$R = \mu_1 N\,, \qquad F = S e^{\mu_2(\alpha + \pi/2)}$$

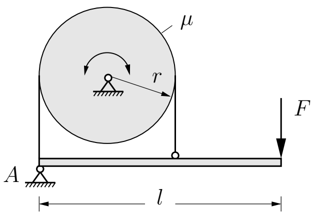


folgt

$$\underline{\underline{F = G e^{\mu_2(\alpha+\pi/2)}(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)}}\,.$$

Aufgabe 8.19 Durch die Bandbremse soll auf eine sich drehende Welle das Bremsmoment M_B ausgeübt werden. **A8.19**

Wie groß ist die dazu erforderliche Kraft F, wenn sich die Welle bei bekanntem Reibungskoeffizient μ
a) rechtsherum oder
b) linksherum dreht?

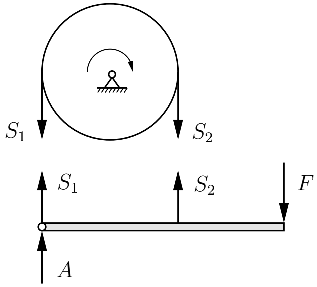


Lösung Gleichgewicht für den Hebel

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad -S_2\, 2r + F\, l = 0$$

liefert

$$S_2 = F\,\frac{l}{2r}\,.$$



Für Rechtsdrehung lautet das Reibungsgesetz

$$S_1 = S_2\, e^{\mu\pi}\,,$$

und das Bremsmoment wird

$$M_B = S_1\, r - S_2\, r = S_2\, r\,(e^{\mu\pi} - 1)\,.$$

Einsetzen von S_2 ergibt

$$\underline{\underline{F_R = \frac{2M_B}{l\,(e^{\mu\pi} - 1)}}}\,.$$

Für Linksdrehung folgt aus dem Reibungsgesetz

$$S_2 = S_1\, e^{\mu\pi}$$

und dem Bremsmoment

$$M_B = S_2\, r - S_1\, r = S_2\, r\,(1 - e^{-\mu\pi})$$

durch Einsetzen von S_2

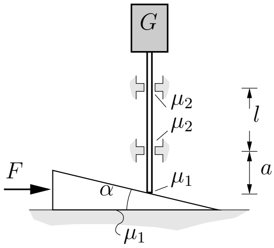
$$\underline{\underline{F_L = \frac{2M_B\, e^{\mu\pi}}{l\,(e^{\mu\pi} - 1)}}}\,.$$

Anmerkung: Wegen $e^{\mu\pi} > 1$ gilt bei gleichem M_B für die Kräfte $F_L > F_R$!

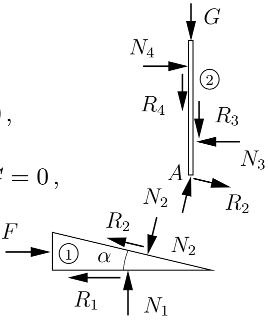
A8.20

Aufgabe 8.20 Durch Vorschieben des gewichtslosen Keils soll der Körper vom Gewicht G mit gleichförmiger Geschwindigkeit angehoben werden.

Wie groß ist die dafür benötigte Kraft F, wenn an den Berührungsflächen des Keils der Reibungskoeffizient μ_1, an den Berührungspunkten des Stabes der Reibungskoeffizient μ_2 herrscht?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Keil und den Stab



$$① \rightarrow: \quad F - R_1 - R_2 \cos\alpha - N_2 \sin\alpha = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_1 - N_2 \cos\alpha + R_2 \sin\alpha = 0\,,$$

$$② \rightarrow: \quad N_2 \sin\alpha + R_2 \cos\alpha - N_3 + N_4 = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_2 \cos\alpha - R_2 \sin\alpha - R_3 - R_4 - G = 0\,,$$

$$\overset{\frown}{A}: \quad -N_3 a + N_4(l + a) = 0$$

und den Reibungsgesetzen

$$R_1 = \mu_1 N_1\,, \qquad R_2 = \mu_1 N_2\,, \qquad R_3 = \mu_2 N_3\,, \qquad R_4 = \mu_2 N_4$$

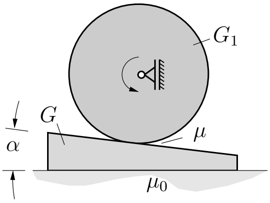
ergibt sich durch Auflösen nach F die benötigte Kraft

$$\underline{\underline{F = G\,\frac{\mu_1(\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha) + (\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha) - \mu_2\,\dfrac{l+2a}{l}\,(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)}}}\,.$$

Anmerkungen:

- Die Reibkräfte müssen entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung eingezeichnet werden.
- Wenn der Nenner Null wird ($F \rightarrow \infty$), ist das System selbsthemmend.

Aufgabe 8.21 Eine rotierende rauhe Walze drückt durch ihr Gewicht G_1 auf ein keilförmiges Werkstück vom Gewicht G, das auf einer rauhen Unterlage ruht. **A8.21**

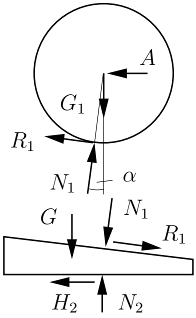


Wie groß muss bei gebenem Haftungskoeffizienten μ_0 der Reibungskoeffizient μ mindestens sein, damit sich das Werkstück in Bewegung setzt?

Lösung Da der Schwerpunkt der Welle in Ruhe (Gleichgewicht) ist, gelten für die Welle die Kräftegleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: \quad N_1 \sin\alpha - R_1 \cos\alpha - A = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_1 \cos\alpha + R_1 \sin\alpha - G_1 = 0\,.$$



Mit dem Reibgesetz

$$R_1 = \mu N_1$$

folgen hieraus

$$N_1 = \frac{G_1}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}\,, \qquad R_1 = \mu \frac{G_1}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}\,.$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen für das Werkstück

$$\rightarrow: \quad R_1 \cos\alpha - N_1 \sin\alpha - H_2 = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_2 - N_1 \cos\alpha - R_1 \sin\alpha - G = 0$$

liefert

$$H_2 = G_1 \frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\,, \qquad N_2 = G_1 + G\,.$$

Damit die Bewegung gerade einsetzt, muss die Haftgrenzbedingung

$$H_2 = \mu_0 N_2$$

erfüllt sein. Einsetzen und Auflösen nach μ ergibt schließlich

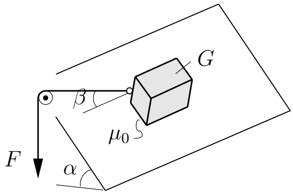
$$\underline{\underline{\mu = \frac{\mu_0(1 + G/G_1) + \tan\alpha}{1 - \mu_0(1 + G/G_1)\tan\alpha}}}\,.$$

Anmerkungen:

- Für $\mu_0 > \cot\alpha/(1 + G/G_1)$ liegt Selbsthemmung vor. Das Werkstück setzt sich dann nicht in Bewegung.
- Für $\alpha = 0$ vereinfacht sich das Ergebnis zu $\mu = \mu_0(1 + G/G_1)$.

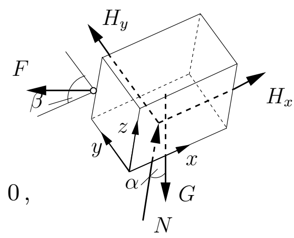
A8.22

Aufgabe 8.22 Ein Körper vom Gewicht G liegt auf einer rauhen schiefen Ebene und wird über ein schräg gespanntes Seil (parallel zur schiefen Ebene) durch die Kraft F belastet.



Wie groß muss der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit der Körper in Ruhe bleibt?

Lösung Wir führen ein geeignetes Koordinatensystem ein, skizzieren das Freikörperbild und stellen die Gleichgewichtsbedingungen auf:



$$\sum F_x = 0 \; : \quad H_x - F\cos\beta = 0\,,$$

$$\sum F_y = 0 \; : \quad H_y + F\sin\beta - G\sin\alpha = 0\,,$$

$$\sum F_z = 0 \; : \quad N - G\cos\alpha = 0\,.$$

Darin sind H_x und H_y die Komponenten der Haftkraft H. Für sie und für N erhält man

$$|H| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{F^2 - 2FG\sin\alpha\sin\beta + G^2\sin^2\alpha}\,,$$

$$N = G\cos\alpha\,.$$

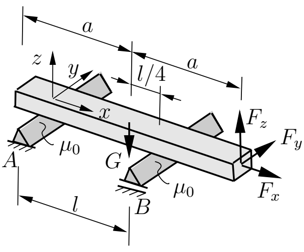
Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H| < \mu_0 N \qquad \text{bzw.} \qquad \mu_0 > \frac{|H|}{N}$$

liefert die erforderliche Größe von μ_0:

$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{\sqrt{F^2 - 2FG\sin\alpha\sin\beta + G^2\sin^2\alpha}}{G\cos\alpha}}}\,.$$

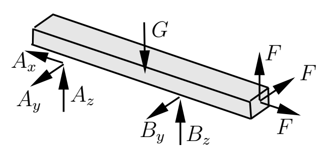
Aufgabe 8.23 Ein starrer Balken (Gewicht G) ist exzentrisch auf zwei Schienen aufgelegt und an einem Ende durch Kräfte belastet (das Lager B sei nur in x-Richtung verschieblich). **A8.23**



Bei welcher Belastung und an welchem Lager beginnt sich der Balken zu bewegen?

Gegeben: $F_x = F_y = F_z = F$, $a = l$, $\mu_0 = 2/3$.

Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen erhält man die Lagerreaktionen



$$A_x = F\,,$$

$$A_y = -\frac{3}{4}F\,, \qquad B_y = \frac{7}{4}F\,,$$

$$A_z = \frac{G}{4} + \frac{3}{4}F\,, \quad B_z = \frac{3}{4}G - \frac{7}{4}F\,.$$

Damit lauten die Normal- und die Haftkräfte bei A und B

$$N_A = A_z = \frac{G}{4} + \frac{3}{4}F\,, \qquad H_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{5}{4}F\,,$$

$$N_B = B_z = \frac{3}{4}G - \frac{7}{4}F\,, \qquad H_B = |B_y| = \frac{7}{4}F\,.$$

Nehmen wir eine einsetzende Bewegung bei A an, dann liefert die Haftgrenzbedingung

$$H_A = \mu_0 N_A \quad \rightsquigarrow \quad F_1 = G\,\frac{\mu_0}{5 - 3\mu_0} = \frac{2}{9}\,G\,.$$

Entsprechend ergibt sich für eine einsetzende Bewegung bei B

$$H_B = \mu_0 N_B \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{F_2}} = G\,\frac{3\mu_0}{7(1 + \mu_0)} = \underline{\underline{\frac{6}{35}}}\,G\,.$$

Wegen $F_1 < F_2$ setzt die Bewegung bei der Kraft F_2 am Lager B ein.

Springer
http://www.springer.com/978-3-540-68372-8

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1
Statik
Gross, D.; Ehlers, W.; Wriggers, P.
2008, X, 230 S. 512 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-540-68372-8